Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática

31 de Enero de 2020. Fernando Mayoral `mayoral@us.es`

Desigualdades (polinomios, funciones, gráficas).

1.-Algunas desigualdades básicas.

0) En lo referente a relación de las desigualdades con las operaciones suma/resta y producto/cociente, las propiedades básicas son las siguientes. Sean x, y, a números reales,

- $x \leq y \iff a + x \leq a + y$.
- Si $a > 0$, $x \leq y \iff ax \leq ay$.
- Si $a < 0$, $x \leq y \iff ax \geq ay$.

1) $x^2 \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. La igualdad sólo se cumple para $x = 0$.

2) Desigualdad triangular. Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

La igualdad se cumple si, y sólo si, $xy \geq 0$.

3) Desigualdades entre las Medias: Sean $a, b > 0$,

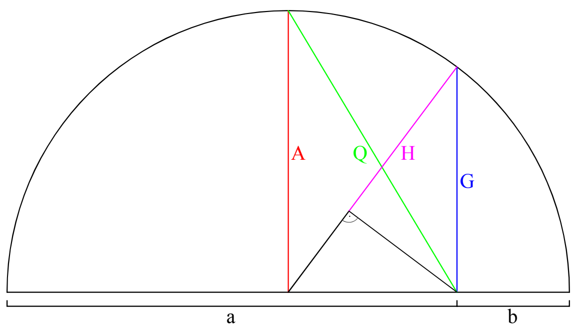
- (A) media aritmética $A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$.
- (G) media geométrica $G(a,b) = \sqrt{ab}$.
- (H) media armónica $H(a,b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \dfrac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)}$.
- (Q) media cuadrática $Q(a,b) = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Entonces se verifica que

$$\boxed{\min\{a,b\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max\{a,b\}}.$$

Además, se verifica alguna de las igualdades (si, y sólo si, se verifican todos y) si, y sólo si, $a = b$.

Las desigualdades entre las medias tienen la visualización adjunta. Dicha visualización muestra también cuánto se parecen y cuánto se diferencian dichas medias en función de lo parecidos o diferentes que sean a y b.



Todas las desigualdades involucradas en $H \leq G \leq A \leq Q$ son equivalentes entre si y son equvalentes a la desigualdad $(a-b)^2 \geq 0 \;\; \equiv \;\; 2ab \leq a^2 + b^2$ (y la igualdad se cumple sólo, y exclusivamente, para $a = b$). También puede considerarse una interpretación geométrica en términos de áreas y perímetros de rectángulos.

- puesto que ab es el área de un rectágulo de lados a y b (perímetro $= 2(a+b)$) y $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ es el área del cuadrado que tiene dicho perímetro (lado $= \dfrac{a+b}{2}$), la desigualdad

$$H \le A \;\equiv\; \frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2} \;\equiv\; ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

nos dice que el área del rectágulo es menor o igual que la del cuadrado del mismo perímetro. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es el cuadrado.*

- Puesto que $2(a+b)$ es el perímetro de un rectángulo de lados a y b (área $= ab$) y el perímetro del cuadrado que tiene área ab (lado $= \sqrt{ab}$) es $4\sqrt{ab}$ la desigualdad

$$G \le A \;\equiv\; \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \;\equiv\; 4\sqrt{ab} \le 2(a+b),$$

nos dice que el perímetro del rectángulo es menor o igual que el del cuadrado del mismo área. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un área dada, el que tiene menor perímetro es el cuadrado.*

4) Desigualdad del Reordenamiento. Sean (a, b) y (x, y) dos parejas de números reales. Si $a \le b$ y $x \le y$, entonces

$$\boxed{ay + bx \le ax + by.}$$

5) Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sean (a, b) y (x, y) dos parejas de números reales. Entonces

$$|ax + by| \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2} \;\equiv\; (ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

***)** Las desigualdades entre las medias, la desigualdad del reordenamiento y la desigualdad de Cauchy-Schwarz tienen versiones para $n-$plas.

Ejercicio 1. Determina el valor o valores de a para que se cumpla que

$$\frac{x^2+ax+1}{x^2+4x+8} < 8 \quad \text{para todo número real} \quad x.$$

. . . .

Ejercicio 2. Determina el mayor número de entre los siguientes

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \cdots, \sqrt[n]{n}, \cdots$$

. . . .

Ejercicio 3.

1) Sean x e y números reales tales que $x+y = 2$ y $x^2+y^2 \le 6$. Demuestra que $1-\sqrt{2} \le x, y \le 1+\sqrt{2}$. Interpreta geométricamente el resultado.

2) Sean x e y números reales tales que $x+y+z = 4$ y $x^2+y^2+z^2 = 6$. Demuestra que $\frac{2}{3} \le x, y, z \le 2$.

. . . .

Ejercicio 4. Determina todos los posibles números reales x, y no nulos tales que

$$\frac{2x-y}{y} < 0 \;\text{ y }\; \frac{2y-x}{x} < 0.$$

. . . .

Ejercicio 5. Demuestra que si $a > b > 0$ y $n \geq 2$ es un número natural, entonces

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{a-b}.$$

...

Ejercicio 6. Demuestra que para $p > 1$ se verifica que $|a+b|^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right)$.

...

Ejercicio 7. Determina las soluciones de la inecuación $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x+1}$

...

Ejercicio 8. Demuestra que si $x, y > 0$ y $x + y = 1$, entonces $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

...

Ejercicio 9. Demuestra que si a, b y c son los lados de un triángulo, entonces

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2.$$

Indicación: Usando la desigualdad $H \leq A$ entre las medias aritmética y armónica para tres números reales $x, y, z > 0$ se obtiene que

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

...

Ejercicio 10. Demuestra que si $a, b > 0$, entonces

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}.$$

...

Ejercicio 11. Demuestra que si $a, b, c \geq 0$, entonces

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

...

Ejercicio 12. Demuestra que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos tales que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, entonces

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n.$$

...